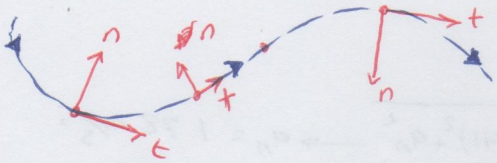
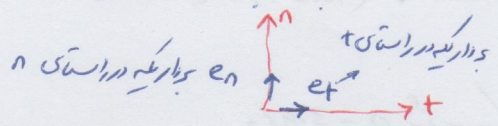
مختصات مماسی و عمودی :

بیان شد که برای بررسی حرکت یک ذره روی خط در صفحه، می‌توان از دستگاه‌های مختصات گوناگونی مانند کارتزین، عمودی یا مماسی و قطبی استفاده کرد. در این بخش مختصات عمودی - مماسی را بررسی می‌کنیم. در مختصات عمودی - مماسی، محورهای مختصات یعنی n و t همراه با ذره و در امتداد مسیر حرکت می‌کنند و همان جهت آن‌ها را مثبت گرفته و به حرکت ذره، ستگی دارد مؤلفه‌ی t در هر نقطه مماس بر مسیر است و جهت مثبت آن در جهت حرکت است و مؤلفه‌ی n در هر نقطه عمود بر مسیر است و جهت مثبت آن به داخل انحنای مسیر است.



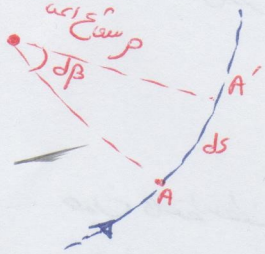


حال بینیم وضعیت سرعت و شتاب در هر نقطه در مسیر چی می‌شود

سرعت در هر نقطه از مسیر همواره در حرکت است پس جهت سرعت همیشه در راستای t است

$$\vec{v} = v\,e_t$$

شتاب دهنده جهت v / در راستای t است / و مؤلفه‌ی n ندارد / اندازه v



$$\vec{v} = v\,e_t = \rho\frac{d\beta}{dt}e_t = \rho\dot{\beta}\,e_t$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{v^2}{\rho}e_n + \dot{v}\,e_t \longrightarrow \begin{cases} a_n = \frac{v^2}{\rho} = \rho\dot{\beta}^2 = v\dot{\beta} & \text{مقدار} \\ a_t = \dot{v} = \ddot{s} \end{cases}$$

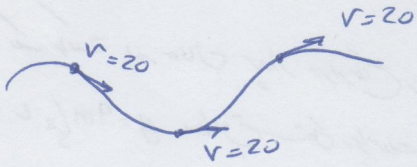
بردار شتاب کل

شتاب دهنده تغییر جهت بردار سرعت

شتاب دهنده تغییر اندازه سرعت (که در همان راستای مسیر است)

مقدار اندازه شتاب کل $a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$

مثلا اگر جسمی در مسیر منحنی شکل با سرعت ثابت در حال حرکت کند مؤلفه‌ی $\dot{v}e_t$ صفر می‌شود زیرا مقدار سرعت آن عوض نمی‌شود ولی چون جهت بردار سرعت (به دلیل منحنی شکل بودن مسیر) عوض می‌شود، مؤلفه‌ی $\frac{v^2}{\rho}e_n$ مقدار دارد و صفر نیست



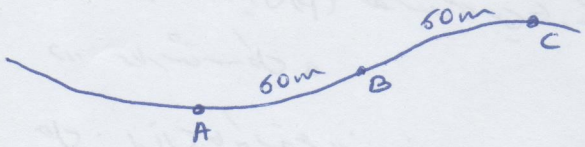
با این که سرعت ثابت است ولی شتاب داریم

مثال : راننده‌ی یک خودرو در جاده، با دیدن مانعی در مسیر خود خراب و ثابت، راننده یک خودرو ترمز حواسش را به کار می‌اندازد تا شتاب کاهنده یکنواخت را تولید کند. سرعت حرکت خودرو در نقطه‌ی A برابر $100\ km/h$ و در نقطه‌ی C - فاصله 120 متری A (در امتداد جاده) برابر با $50\ km/h$ است. اگر سرنشین خودرو، شتاب کل $3\ m/s^2$ را در نقطه A کسب کند و اگر شعاع انحنا در C برابر با 150m شد، مطلوبست

الف) شعاع انحنا در نقطه A

ب) شتاب خودرو در نقطه عطف B

ج) شتاب کل در C



حل: (در امتداد مسیر)

ابتدا باید توجه کرد که وقتی خودرو ترمز کرده شتاب کاهنده یکنواخت ایجاد کند طی مسیر با نرخ ثابتی کاهش می‌یابد و بنابراین جهت سرعت ندارد. سؤال منظور این است که a_t ثابت است (مقدار سرعت a_t مشخص می‌شود)

تند

$V_A = 100 Km/h = 27.78 m/s$

$V_C = 50 Km/h = 13.89 m/s$

الف) شتاب اخیر در A:

ابتدا a_t را می‌یابیم

$$V_C^2 - V_A^2 = 2a_t \Delta x_{AC}$$

$$\longrightarrow (13.89)^2 - (27.78)^2 = 2a_t \times 120 \longrightarrow a_t = -2.41 \ m/s^2$$

کاهنده

شتاب کل در A $a = 3 m/s^2$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \longrightarrow 3 = \sqrt{(-2.41)^2 + a_n^2} \longrightarrow a_n = 1.78 \ m/s^2$$ در نقطه A

$$a_n = \frac{V^2}{\rho_A} \longrightarrow 1.78 = \frac{(27.78)^2}{\rho_A} \longrightarrow \rho_A = 435 m$$

ب) شتاب کل در B

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$$

$$a_t = -2.41$$

$$a_n = \rho \beta^2 = \frac{V^2}{\rho}$$

چون قطعه عطف است پس شعاع انحنا در آن بی‌نهایت است

$$a_n = 0$$

$$\longrightarrow a_B = a_t = -2.41$$

ج) شتاب کل در C

$$a_C = a_n e_n + a_t e_t$$

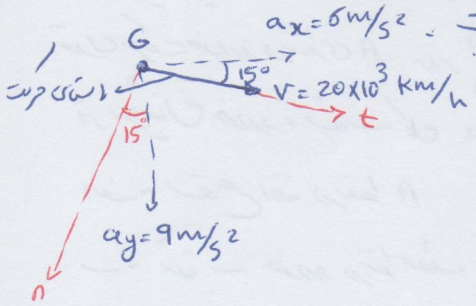
$$a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{(13.89)^2}{150} = 1.286 \ m/s^2$$

$$a_t = -2.41$$

$$\longrightarrow a_{بردار} = 1.286 e_n - 2.41 e_t$$

اندازه $a = \sqrt{(1.286)^2 + (-2.41)^2} = 2.73 \ m/s^2$

مثال: یک راکت در حال پرواز در ارتفاع زیاد دارای مؤلفه‌های افقی شتاب برابر با $6 m/s^2$ و مؤلفه قائم شتاب ناشی از گرانش برابر با $g = 9 m/s^2$ مطابق شکل زیر است. اگر در لحظه نشان داده شده، سرعت مرکز جرم راکت در امتداد مسیر حرکت $20 \times 10^3 Km/h$ باشد، مطلوبست:



الف) شعاع انحنای مسیر پرواز

ب) میزان افزایش تندی حرکت (منظور از تندی، مقدار سرعت است نه جهت آن)

ج) سرعت زاویه‌ای ($\vec{\beta}$) خط واصل بین G و مرکز انحنای C

د) بردار شتاب کل a

حل: از آن جایی که شعاع انحنا فواصلی از مختصات عمودی مماس استفاده می‌کنیم. قاعدتاً محور + در راستای حرکت و T است و محور n عمود بر آن

می‌توان در نقطه مشخص داده شده با تجزیه a_x و a_y به مؤلفه‌های آن در راستای $\vec{e}_t$ و $\vec{e}_n$ را بدست آورد

$$a_t = 6\cos 15^\circ + 9\sin 15^\circ = 8.12\ m/s^2$$

$$a_n = 9\cos 15 - 6\sin 15^\circ = 7.14\ m/s^2$$

الف) شعاع انحنای مسیر

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \longrightarrow 7.14 = \frac{(20\times10^3 \times 1/3.6)^2}{\rho} \longrightarrow \rho = 4.32\times10^6\ m$$

(برای تبدیل Km/h به m/s)

ب) میزان افزایش تندی حرکت: منظور مقدار سرعت است که برابر با a_t است

$$\dot{V} = a_t = 8.12\ m/s^2$$

ج) سرعت زاویه‌ای $\dot{\beta}$

$$V = \rho\dot{\beta} \longrightarrow 20\times10^3 \times \frac{1}{3.6} = 4.32\times10^6 \times \dot{\beta}$$

$$\longrightarrow \dot{\beta} = 12.85\times10^{-4}\ rad/s$$

د) بردار شتاب کل

$$\vec{a} = a_n\vec{e}_n + a_t\vec{e}_t$$

$$\vec{a} = 7.14\vec{e}_n + 8.12\vec{e}_t \quad m/s^2$$

مثال: یک خودروی آزمایشی، حرکت خود را از حالت سکون روی یک مسیر دایره‌ای افقی به شعاع 80m آغاز می‌کند و طرف مدت 10s تندی حرکت خود را با میزان یکنواخت افزایش می‌دهد تا به $100\ Km/h$ برسد. مقدار شتاب کل خودرو را 8 ثانیه پس از شروع حرکت تعیین کنید.

حل: دقت کنید که در مسیر دایره‌ای در واقع شعاع انحنا همیشه ثابت است

چون گفته تندی حرکت خود را با میزان یکنواخت افزایش داده، منظور این است که a_t ثابت است (شتاب ثابت بوده نه لحظه‌ای شتاب متوسط است)

$$a_t = \frac{V - V_0}{\Delta t} = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

$$a_t = (a_t)_{av} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{100/3.6 - 0}{10} = 2.78\ m/s^2$$

می‌خواهیم در $t = 8s$ مؤلفه‌های شتاب یعنی a_t و a_n را بدست آوریم تا a کل را بدست آوریم $\rightarrow$ a_t ثابت است نه سرعت آن

$a_n = \frac{V^2}{\rho}$ در همان لحظه سرعت را در $t = 8s$ بدست آوریم

$$a_t = \frac{dv}{dt} \longrightarrow dv = a_t dt \longrightarrow \int_0^V dv = \int_0^8 a_t dt \quad (a_t = 2.78)$$

$$\longrightarrow V = 2.78t\Big|_0^8 = 2.78\times8 = 22.22\ m/s$$

(چون تندی یکنواخت زیاد می‌شود، یعنی شتاب ثابت است می‌توانستیم از رابطه $V = at + V_0$ هم استفاده کنیم)

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{(22.22)^2}{80m} = 6.17$$

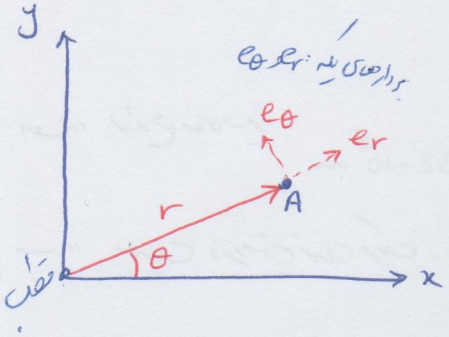
$$\vec{a} = a_n\vec{e}_n + a_t\vec{e}_t = 6.17\vec{e}_n + 2.78\vec{e}_t$$

اندازه $a = \sqrt{e_n^2 + e_t^2} = \sqrt{(6.17)^2 + (2.78)^2} = 6.77\ m/s^2$

مختصات قطبی

یکی دیگر از دستگاه‌های مختصاتی که برای بیان حرکت یک نقطه در صفحه کار می‌رود، مختصات قطبی $(r-\theta)$ است.

در این مختصات، موقعیت ذره توسط یک خط‌کش که می‌تواند حول یک نقطه ثابت و یک مختصه زاویه‌ای که از یک محور مرجع اندازه‌گیری می‌شود، تعیین می‌شود.



در این دستگاه، موقعیت ذره توسط بردار $\vec{r}$ تعیین می‌شود:

$$\vec{r} = r\vec{e}_r$$

سرعت ذره:

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta = v_r\vec{e}_r + v_\theta\vec{e}_\theta$$

سرعت تغییر بردار r اندازه: $v_r = \dot{r}$

سرعت تغییر زاویه θ اندازه: $v_\theta = r\dot{\theta}$

اندازه سرعت $v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}$

شتاب:

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta = a_r\vec{e}_r + a_\theta\vec{e}_\theta$$

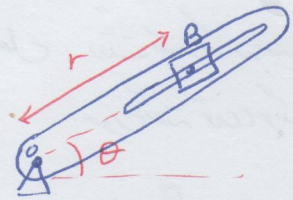
اندازه $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$

اندازه $a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$

$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}$

مثال

دوران بازوی شیردار زیر از رابطه‌ای $\theta = 0.2t + 0.02t^3$ (Rad) پیروی می‌کند و لغزش بلوک B در طول بازو از رابطه $r = 0.2 + 0.04t^2$ (m) پیروی می‌کند. مقادیر سرعت و شتاب B را در لحظه $t = 3s$ بدست آورید.



$$r = 0.2 + 0.04t^2$$

$$r|_{t=3s} = 0.2 + 0.04(3)^2 = 0.56 \ m$$

$$v_r = \dot{r} = 0.08t$$

$$v_r|_{t=3s} = 0.08 \times 3 = 0.24 \ m/s$$

$$v_\theta = r\dot{\theta} = r(0.2 + 0.06t^2) \longrightarrow v_\theta|_{t=3} = 0.56 \times (0.2 + 0.06 \times 3^2) = 0.414 \ m/s$$

$$\vec{v} = 0.24\vec{e}_r + 0.414\vec{e}_\theta$$

$$\longrightarrow v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = \sqrt{(0.24)^2 + (0.414)^2} = 0.479$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0.08 - (0.2 + 0.04t^2)(0.2 + 0.06t^2)^2$$

$$a_r|_{t=3} = 0.08 - (0.2 + 0.04 \times 9)(0.2 + 0.06 \times 9)^2 = -0.227$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

$$r|_{t=3} = 0.56 \qquad \ddot{\theta} = 0.12t \longrightarrow \ddot{\theta}|_{t=3} = 0.36$$

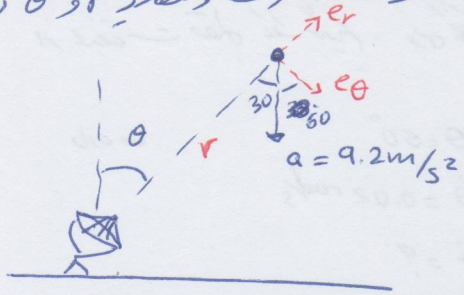
$$\dot{r}|_{t=3} = 0.24 \qquad \dot{\theta} = 0.2 + 0.06t^2$$

$$\dot{\theta}|_{t=3} = 0.74$$

$$a_\theta = 0.56 \times 0.36 + 2 \times 0.24 \times 0.74 = 0.557$$

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = 0.6 \ m/s^2$$

مثال: یک رادار ردیاب در صفحه قائم مسیر راکتی قرار دارد. در لحظه‌ای که $\theta=30^\circ$ است داده‌های زیر برای عملکرد راکت ثبت می‌شود: $r=8\times10^4\,m$ و $\dot r=1200\,m/s$ و $\dot\theta=0.8\,deg/s$. شتاب راکت فقط ناشی از جاذبه زمین بوده (پرواز بدون تغییر سرعت) و در لحظه مذکور شتاب برابر با $9.2\,m/s^2$ و به سمت پایین است. سرعت v راکت و مقادیر $\ddot r$ و $\ddot\theta$ در لحظه مذکور را بیابید.



حل: دقت کنید که هر محوری می‌تواند معیار اندازه‌گیری θ باشد نه لزوماً افقی

دو مؤلفه شتاب شعاعی (a_r) و زاویه‌ای (a_θ) شتاب را با توجه به a داده شده توسط مسئله بدست می‌آوریم

$$a_\theta = 9.2\cos 60 = 4.6\ m/s^2 \qquad a_r = -9.2\sin 60 = -7.97\ m/s^2$$

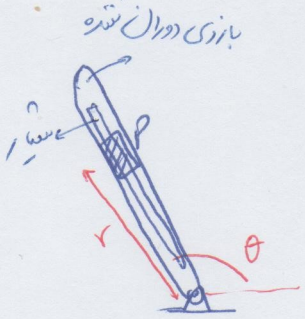
(تبدیل درجه به رادیان)

$$a_r = \ddot r - r\dot\theta^2 \longrightarrow -7.97 = \ddot r - 8\times10^4\times\left(0.8\times\frac{\pi}{180}\right)^2 \longrightarrow \ddot r = 7.63\ m/s^2$$

$$a_\theta = r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta \longrightarrow 4.6 = 8\times10^4\times\ddot\theta + 2\times1200\times\left(0.8\times\frac{\pi}{180}\right) \longrightarrow \ddot\theta = -3.6\times10^{-4}\ Rad/s^2$$

$$v_r = \dot r = 1200\,m/s$$
$$v_\theta = r\dot\theta = 8\times10^4\times\left(0.8\times\frac{\pi}{180}\right) = 1117\,m/s$$
$$\longrightarrow v=\sqrt{1200^2+1117^2} = 1639\ m/s$$

مثال: حرکت نقطه لغزنده P در شیار شعاعی بازوی دوران کننده‌ای زیر، مطابق شکل است. اگر در لحظه‌ای $\dot\theta=0.1\,rad/s$، $\ddot\theta=-0.04\,rad/s^2$ و $r=300mm$ باشد و پیچ با تندی ثابتی در پیچ‌گیر تندی $\dot r=40mm/s$ را تولید می‌کند (P با تندی ثابت $\dot r=40mm/s$ حرکت می‌کند). در لحظه مذکور مقادیر سرعت و شتاب P را بیابید.



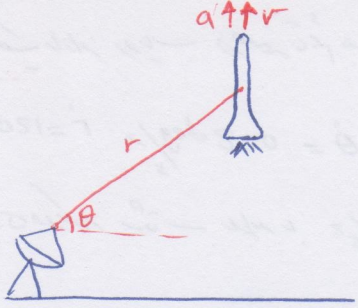
$$\dot\theta = 0.1\ rad/s \qquad r = 300mm = 0.3m$$
$$\ddot\theta = -0.04\ rad/s^2 \qquad \dot r = 40\ mm/s = 0.04\ m/s$$

حل: چون تندی $\dot r$ ثابت است پس $\ddot r = 0$

$$v_r = \dot r = 0.04\,m/s$$
$$v_\theta = r\dot\theta = 0.3\times0.1 = 0.03$$
$$\Big\} \ v = \sqrt{v_r^2+v_\theta^2} = 0.05$$

$$a_r = \ddot r - r\dot\theta^2 = 0 - 0.3\times(0.1)^2 = -0.003$$
$$a_\theta = r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta = 0.3\times(-0.04) + 2\times(0.04)(0.1) = 0.004$$
$$\Big\} \ a = \sqrt{a_r^2+a_\theta^2} = 0.005$$

مثال: راکت در راستای تانژانت شمالی زمین و توسط رادار، ردیابی می‌شود. هنگامی که $\theta=60^\circ$ می‌باشد با اندازه‌گیری‌های رادار عبارات $r=9km$، $\ddot r=21\,m/s^2$ و $\dot\theta=0.02\,rad/s$ مقدار سرعت و شتاب راکت را در این موقعیت بیابید.



حل: دقت کنید که سیر راکت تا زمانی است در راستای یک حرکت مستقیم الخط دارد ← شتاب و سرعت در راستای حرکت هستند

ولی چون رادار داریم و داریم حرکت راکت را از دید رادار بررسی می‌کنیم می‌بایست از مختصات قطبی کمک بگیریم. ولی چون شتاب و سرعت راکت را در راستای رادار می‌خواهیم

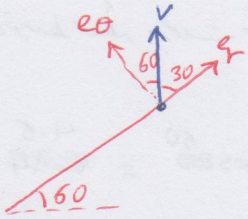
داده‌ها

$r = 9\ Km$ $\quad \theta = 60^\circ$

$\dot{r} = ?$ $\quad \dot{\theta} = 0.02\ rad/s$

$\ddot{r} = 21\ m/s^2$ $\quad \ddot{\theta} = ?$

$V_r = \dot{r}$



$V_\theta = r\dot{\theta} = 9\times10^3 \times 0.02 = 180\ m/s$

اندازه‌ی V که چون راکت همیشه بالای رود راستای آن را می‌دانیم

$V_\theta = V\cos 60 = 180$

$\longrightarrow 180 = V \times \frac{1}{2} \longrightarrow V = 360$

$V_r = V\sin 60 = 360 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \longrightarrow \dot{r} = 180\sqrt{3}$

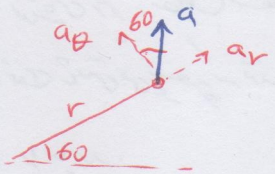
$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 21 - 9\times10^3 \times (0.02)^2 = 17.4$

$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$

راستای شتاب را هم می‌دانیم چون حرکت کاملاً تابع است

از طرفی $a_r = a\sin 60$

$\longrightarrow 17.4 = a \times \frac{\sqrt{3}}{2} \longrightarrow a = 20.09$



$a_\theta = a\cos 60 = 20.09 \times \frac{1}{2} = 10.04$

$a_\theta = 9\times10^3 \times \ddot{\theta} + 2\times180\sqrt{3}\times0.02 = 10.04$

$\longrightarrow \ddot{\theta} =$ بدست می‌آید